

COORDONNÉES NORMALES

Le formalisme de Lagrange permet de changer de variables avec une procédure donnée :

$$\{\vec{r}_i\} \longrightarrow \{q_j\} \quad \Rightarrow \quad \{\vec{v}_i\} \longrightarrow \{\dot{q}_j\}$$

et ensuite il faut écrire l'énergie cinétique et l'énergie potentielle par biais des $\{q_j\}$ et des $\{\dot{q}_j\}$:

$$T(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) \quad \text{et} \quad V(\{q_j\}, t)$$

on écrit L :

$$L = T - V$$

et enfin on a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

L'espoir est que si on a choisit des bonnes coordonnées généralisées, les équations dynamiques seront faciles à résoudre.

Le même esprit, même s'il n'est pas déclaré explicitement, s'applique au problème des coordonnées normales.

Pour commencer on définit le concept de point d'équilibre mécanique stable.

Si on a une particule dans un potentiel $V(\vec{r})$, le point d'équilibre mécanique stable est le minimum de l'énergie potentielle, à savoir

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} V = 0$$

qui identifie les points extrêmes : minima, maxima et points de selle.

Le minimum est en suite le point extrême dont la matrice hessienne est définie positive

$$\underline{K} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_d^2} \end{array} \right)_{\vec{r}_{\text{ext.}}}$$

en d -dimensions

↑ calculée aux points extrémales

Définie positive veut dire que

$$\frac{\vec{v}^T \underline{K} \vec{v}}{\vec{v}^T \vec{v}} > 0 \quad \forall \vec{v} \neq 0$$

et que les valeurs propres de $\underline{K}$ sont tous positifs.

Si on a un système composé par N particules la généralisation est facile : il suffit de regarder le système en dN dimensions :

$$\vec{\nabla} V = 0$$

(gradient en dN dimensions)
 $\Rightarrow$ système de dN équations

$$\underline{K} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_{dN}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_{dN} \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_{dN}^2} \end{array} \right)_{\vec{r}_{\text{ext.}}}$$

matrice
 $dN \times dN$

et on choisit le $\vec{r}_{\text{ext.}}$ tel que $\underline{K}$ est définie positive.

PETITE NOTE :

On a un système composé par deux particules en 1D, qui sont reliées par un ressort de longueur à repos $l_0 = 0$

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \quad k > 0$$

Donc, intuitivement le point d'équilibre stable est $x_2 = x_1$

(qui est un peu étrange ! on va comprendre mieux)

D'abord on cherche le point d'équilibre :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dx_1} = -k(x_2 - x_1) = 0 \\ \frac{dV}{dx_2} = k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Il est clair que $x_2 - x_1 = 0$ est solution, mais il nous dit pas où sont x_2 et x_1 !

On prend la matrice hessienne

$$K = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \end{array} \right)_{x_1=x_2} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

On calcule les valeurs propres :

$$(k - \lambda)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow (k - \lambda)^2 = k^2$$

$$\Rightarrow k - \lambda = \pm k$$

$$\Rightarrow \lambda_+ = 0 \quad \leftarrow ?$$

$$\boxed{\lambda_- = 2k > 0} \quad \text{ok}$$

On cherche les vecteurs propres correspondantes :

$\vec{v}^-$:

$$(\underline{k} - \lambda_- \underline{I}) \vec{v}^- = 0$$

$$\begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{pmatrix} = 0$$

on a alors

$$v_1^- = -v_2^-$$

(et on peut choisir

$$v_1^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } v_2^- = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

si on veut que $(\vec{v}^-)^T \cdot \vec{v}^- = 1$)

Géométriquement il correspond à un déplacement opposé des deux particules



donc c'est le mouvement qui étire le ressort

On cherche le vecteur propre correspondant à $\lambda_+ = 0$

$\vec{v}^+$

$$(\underline{k} - \lambda_+ \underline{I}) \vec{v}^+ = 0$$

$$\begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{pmatrix} = 0$$

La solution est

$$v_1^+ = v_2^+$$

(et on peut choisir

$$v_1^+ = v_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}})$$



il est un déplacement qui ne change pas la longueur du ressort : il est une translation rigide,

Si on generalise à un système de N particules en d dimensions, on doit s'attendre à combien de valeurs propres nulles ?

d translations rigides $\rightarrow d$ valeurs propres nulles

$d=1 \rightarrow$ pas de rotations $\Rightarrow$ pas d'autres valeurs propres nulles

$d=2 \rightarrow 1$ rotation rigide $\Rightarrow 1$ valeur propre nulle

$d=3 \rightarrow 3$ rotations rigide $\Rightarrow 3$ valeurs propres nulles

Donc en effet on peut s'attendre que $\underline{K}$ soit semi-définie positive si le système n'est pas soumis à l'action de forces externes.

On peut revenir au problème originale du minimum du potentiel $V(\{r_i\}) = V(\vec{r})$.

On le développe autour du minimum $\vec{r}_0$

$$V(\vec{r}) \approx V(\vec{r}_0) + \underbrace{\nabla_{\vec{r}} V|_{\vec{r}_0}}_0 \cdot \vec{r}_0 + \frac{1}{2} (\vec{r} - \vec{r}_0)^T \cdot \underline{K} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) + \dots$$

" 0
par construction
(on est au minimum)

on néglige
termes d'ordre
supérieur

et donc

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{2} (\vec{r} - \vec{r}_0)^T \cdot \underline{K} (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

le terme $V(\vec{r}_0)$ est une constante qui ne contribue pas aux équations, qui impliquent les dérivées

On peut donc écrire aussi l'énergie cinétique :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \vec{v}^T \underline{\underline{M}} \vec{v}$$

ou on a introduit la matrice des masses $\underline{\underline{M}}$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & m_1 & & \\ & & & m_2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & m_2 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & m_N \\ & & & & & & & & m_N \end{pmatrix}$$

$\overbrace{\hspace{10em}}^{dN}$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{dN}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_d$

et on peut directement écrire les équations de Lagrange en sachant que

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^T \underline{\underline{M}} \dot{\vec{r}} - \frac{1}{2} (\vec{r} - \vec{r}_0)^T \underline{\underline{K}} (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Equation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad i=1, \dots, dN$$

ou x_i est la i -ème composante du vecteur $\vec{r}$ (à dN dimensions)

Qui est, explicitement

$$m_i \ddot{x}_i - \sum_j K_{ij} (x_j - x_{j0}) = 0$$

Structurellement, cette équation ressemble celle d'un oscillateur harmonique, mais en effet elle est (elles sont!) plus compliquée.

En effet, il s'agit de N oscillateurs harmoniques couplés entre eux : on doit résoudre les équations toutes ensemble.

On re-écrit les équations sous forme matricielle :

$$\underline{M} \ddot{\vec{r}} - \underline{K} (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

on change de variable $\vec{y} = \vec{r} - \vec{r}_0$, avec
 $\dot{\vec{y}} = \dot{\vec{r}}$ et $\ddot{\vec{y}} = \ddot{\vec{r}}$

donc

$$\underline{M} \ddot{\vec{y}} - \underline{K} \vec{y} = 0$$

On multiplie toute l'équation par $\underline{M}^{-1}$ ($\underline{M}^{-1}$ existe car toutes les masses sont > 0)

$$\ddot{\vec{y}} - \underline{M}^{-1} \underline{K} \vec{y} = 0$$

Maintenant on va diagonaliser la matrice $\underline{M}^{-1} \underline{K}$: on cherche les vecteurs et valeurs propres :

$$\omega_k^2 \quad \text{et} \quad \vec{z}_k$$

$$\underline{M}^{-1} \underline{K} \vec{z}_k = \omega_k^2 \vec{z}_k$$

Qu'est-ce qu'on peut dire des valeurs propres de $\underline{M}^{-1} \underline{K}$?

On peut réécrire l'équation comme

$$\underline{M}^{-1/2} \underline{K} \vec{z}_k = \omega_k^2 \underline{M}^{1/2} \vec{z}_k$$

ou
$$\underline{\underline{M}}^{\pm 1/2} = \begin{pmatrix} m_1^{\pm 1/2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n^{\pm 1/2} \end{pmatrix}$$

en suite on sait que $\underline{\underline{M}}^{-1/2} \underline{\underline{M}}^{1/2} = \underline{\underline{I}}$ et donc

$$\underline{\underline{M}}^{-1/2} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{1/2} = \underline{\underline{M}}^{-1/2} \underline{\underline{K}} \underbrace{\underline{\underline{M}}^{-1/2} \underline{\underline{M}}^{1/2}}_{\underline{\underline{I}}} \underline{\underline{z}}_k = \omega_k^2 \underline{\underline{M}}^{1/2} \underline{\underline{z}}_k$$

ou
$$\underline{\underline{\hat{K}}} \underline{\underline{u}}_k = \omega_k^2 \underline{\underline{u}}_k$$

avec
$$\underline{\underline{u}}_k = \underline{\underline{M}}^{1/2} \underline{\underline{z}}_k \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\hat{K}}} = \underline{\underline{M}}^{-1/2} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{-1/2}$$

Donc $\underline{\underline{\hat{K}}}$ et $\underline{\underline{M}}^{-1/2} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{-1/2}$ ont les mêmes valeurs propres.

Mais $\underline{\underline{\hat{K}}}$ est symétrique, car $\underline{\underline{M}}^{-1/2}$ est diagonalisable et $\underline{\underline{K}}$ est symétrique.

Donc les valeurs propres de $\underline{\underline{\hat{K}}}$ sont réels

Est-ce que les valeurs propres de $\underline{\underline{\hat{K}}}$ sont tous positifs ou nulles ?

- si $\underline{\underline{v}}_1, \dots, \underline{\underline{v}}_n$ sont les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres nulles, alors

$$\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{v}}_j = 0 \cdot \underline{\underline{v}}_j \quad j = 1, \dots, n$$

et $\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}$ a le même nombre de valeurs propres nulles que $\underline{\underline{K}}$, avec les mêmes vecteurs propres.

- Si on prend un vecteur quelconque $\vec{s}$ (pas un de ceux à valeur propre nulle) on a

$$\begin{aligned}
 \frac{\vec{s}^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \vec{s}}{\vec{s}^T \cdot \vec{s}} &= \frac{(\vec{s}^T \cdot \underline{\underline{M}}^{-1/2}) \cdot \underline{\underline{K}} \cdot (\underline{\underline{M}}^{-1/2} \vec{s})}{\vec{s}^T \cdot \vec{s}} = \\
 &= \frac{[\underline{\underline{M}}^{-1/2} \vec{s}]^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot [\underline{\underline{M}}^{-1/2} \vec{s}]}{[\underline{\underline{M}}^{-1/2} \vec{s}]^T \cdot [\underline{\underline{M}}^{-1/2} \vec{s}]} \cdot \frac{[\underline{\underline{M}}^{-1/2} \vec{s}]^T \cdot [\underline{\underline{M}}^{-1/2} \vec{s}]}{\vec{s}^T \cdot \vec{s}} = \\
 &= \underbrace{\frac{[\underline{\underline{M}}^{-1/2} \vec{s}]^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot [\underline{\underline{M}}^{-1/2} \vec{s}]}{[\underline{\underline{M}}^{-1/2} \vec{s}]^T \cdot [\underline{\underline{M}}^{-1/2} \vec{s}]}}_{> 0 \text{ car } \underline{\underline{K}} \text{ est semi-définie positive}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{s}^T \underline{\underline{M}}^{-1} \vec{s}}{\vec{s}^T \cdot \vec{s}}}_{> 0 \text{ car } \underline{\underline{M}}^{-1} \text{ est définie positive}} > 0
 \end{aligned}$$

Donc aussi $\underline{\underline{K}}$ est semi-définie positive. Donc les valeurs propres de $\underline{\underline{K}}$ sont positives ou nulles, et $\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}$ a les mêmes valeurs propres, qu'on peut donc exprimer comme des carrés, ω_k^2 .

On revient alors à l'équation

$$\ddot{\vec{y}} - \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} \vec{y} = 0$$

On écrit

$$\vec{y}(t) = \sum_k Q_k(t) \vec{z}_k$$

↪ on écrit $\vec{y}(t)$ comme
combinaison linéaire des vecteurs
propres de $\underline{M}^{-1} \underline{K}$

et on peut le faire car ils sont une base complète.

Alors, en substituant à la place de $\vec{y}$, on a :

$$\ddot{\vec{y}} = \sum_k \ddot{Q}_k \vec{z}_k \quad \text{et}$$

$$\sum_k \ddot{Q}_k \vec{z}_k - \underline{M}^{-1} \underline{K} \sum_k Q_k \vec{z}_k = 0$$

$$\sum_k \ddot{Q}_k \vec{z}_k - \sum_k Q_k \underline{M}^{-1} \underline{K} \vec{z}_k = 0$$

$$\sum_k \ddot{Q}_k \vec{z}_k - \sum_k Q_k \omega_k^2 \vec{z}_k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_k [\ddot{Q}_k - \omega_k^2 Q_k] \vec{z}_k = 0$$

Puisque les $\vec{z}_k$ sont linéairement indépendants, cette identité est réalisée seulement si leurs coefficients sont tous nuls :

$$\ddot{Q}_k - \omega_k^2 Q_k = 0$$

On a décomposé le système comme s'il était composé de dN oscillateurs harmoniques indépendants.

Les $\{Q_k\}$ sont les "coordonnées normales".

On revient en arrière et on écrit le Lagrangien du système :

$$L = T - V = \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^T \underline{M} \dot{\vec{y}} - \frac{1}{2} \vec{y}^T \underline{K} \vec{y}$$

on utilise l'expression

$$\vec{y} = \sum_k Q_k \vec{z}_k \quad \dot{\vec{y}} = \sum_k \dot{Q}_k \vec{z}_k$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \sum_{k,k'} \dot{Q}_k \dot{Q}_{k'} \vec{z}_{k'}^T \underline{M} \vec{z}_k - \frac{1}{2} \sum_{k,k'} Q_k Q_{k'} \vec{z}_{k'}^T \underline{K} \vec{z}_k =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k,k'} \dot{Q}_k \dot{Q}_{k'} (\vec{z}_{k'}^T \underline{M}^{1/2}) (\underline{M}^{1/2} \vec{z}_k) - \frac{1}{2} \sum_{k,k'} Q_k Q_{k'} (\vec{z}_{k'}^T \underline{M}^{1/2}) (\underline{M}^{-1/2} \underline{K} \underline{M}^{-1/2}) (\underline{M}^{1/2} \vec{z}_k) =$$



$$= \frac{1}{2} \sum_{k,k'} \dot{Q}_k \dot{Q}_{k'} \vec{u}_{k'}^T \cdot \vec{u}_k - \frac{1}{2} \sum_{k,k'} Q_k Q_{k'} \vec{u}_{k'}^T \hat{K} \vec{u}_k$$

Maintenant on se rappelle que $\hat{K}$ est symétrique et que donc ses vecteurs propres sont orthogonaux ("normales") :

$$\vec{u}_{k'}^T \cdot \vec{u}_k = \delta_{kk'} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=k' \\ 0 & \text{si } k \neq k' \end{cases}$$

Au finale :

$$L = \sum_k \left[\frac{1}{2} \dot{Q}_k^2 - \frac{1}{2} \omega_k^2 Q_k^2 \right] = \sum_k L_k$$

On a décomposé le Lagrangien dans la somme de lagrangiens indépendantes.

Qui sont les coordonnées normales correspondantes aux valeurs propres nulles ?

$$\ddot{Q}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_k = \text{const} \quad \text{conservée !}$$

Dans l'exemple donné auparavant, on avait que c'était des translations et des rotations. En effet :

$$\underline{M}^{-1} \underline{K} \tilde{\underline{z}}_k = 0$$

Mais si $\tilde{\underline{z}}_k$ est vecteur propre de $\underline{K}$ associé à une valeur propre nulle, alors est aussi vecteur propre de $\underline{M}^{-1} \underline{K}$, toujours avec valeur propre nulle.

Donc l'argument utilisé pour $\underline{K}$ se porte sur $\underline{M}^{-1} \underline{K}$.

De plus :

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial y_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial z_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_N} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial y_N} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial z_N} \\ & \vdots & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

on l'a écrit en 3D pour l'exemple, et on peut facilement généraliser à d dimensions.

Donc si on prend le vecteur

$$\tilde{\underline{z}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on a

$$\left(\underline{\underline{K}} \underline{\underline{e}} \right)_j = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} \right)_{\vec{r}_0} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} \right)_{\vec{r}_0}$$

On va traiter cette expression par biais d'un exemple : 3 particules

$$V = V_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + V_{13}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + V_{23}(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)$$

On choisit $j=1$ et on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_1} &= \underbrace{\frac{\partial^2 V_{12}}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 V_{13}}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 V_{23}}{\partial x_1 \partial x_1}}_{i=1} + \underbrace{\frac{\partial^2 V_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 V_{13}}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 V_{23}}{\partial x_2 \partial x_1}}_{i=2} + \underbrace{\frac{\partial^2 V_{12}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 V_{13}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 V_{23}}{\partial x_3 \partial x_1}}_{i=3} \\ &\quad \begin{array}{l} = 0 \text{ car ne dépende pas de } x_1 \\ = 0 \text{ ne dépende pas de } x_2 \\ = 0 \text{ car ne dépende pas de } x_1 \\ = 0 \text{ ne dépende pas de } x_3 \end{array} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^2 V_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_{13}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 V_{13}}{\partial x_3 \partial x_1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_{12}}{\partial x_2} \right)}_{=0 \text{ car } V_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \text{ [aussi : 3ème loi]}} + \underbrace{\left(\frac{\partial V_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_{13}}{\partial x_3} \right)}_{=0 \text{ car } V_{13}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)} \right]$$

et ils sont nuls $\forall \vec{r}$, pas seulement en $\vec{r}_0$

Donc si on generalise à N particules, on a que

$$\underline{\underline{K}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

mais ce vecteur est une translation en direction x de toutes les particules.

On repete pour chaqueune des autres directions et on voit donc que les coordonnees normales qui correspondent aux translations en effet disent que l'impulsion totale est conservee et que le systeme bouge de mouvement rectiligne uniforme.

On peut montrer aussi que un argument similaire s'applique aussi pour les rotations, mais on ne marque pas ici la derivation.

A quoi servent-elles, les coordonnees normales ?

D'un cote, clairement elle rendent la solution du systeme plus facile car elle sont decouplees les unes des autres. Sont des simples oscillateurs harmoniques.

De l'autre cote, elles offrent une facon de investiguer experimentalement un systeme !

Si on l'excite avec une perturbation periodique de pulsation ω , si ω corresponde a une des frequences propres, alors on le remarque car le systeme entre en resonance. Donc, si on peut choisir ω , on la change pour trouver toutes les frequences de resonance, dont le nombre et les valeurs vont permettre de reconstituer la structure du systeme.

Plusieurs facon sont possibles : laser, neutrons, electrons etc. Tous ces methode a la base utilisent la decomposition en coordonnees normales.

